**ESSEC**
Ecole Supérieure des Sciences Economiques et Commerciales
Etablissement d'enseignement supérieur privé reconnu par l'Etat, affilié à la Chambre de commerce et d'industrie interdépartementale Val d'Oise Yvelines

CONCOURS D'ADMISSION DE 1988

# MATHEMATIQUES I

**Option générale**
*Lundi 9 mai 1988 de 14h à 18h*

Le problème a pour but l'étude d'un algorithme d'approximation de fonctions continues sur [0,1] par des fonctions polynômes.

Les parties II, III et IV sont indépendantes.

Notations:

On associe, à tout entier naturel n non nul et à toute fonction numérique f continue sur [0,1], la fonction polynôme, notée $f_n$, définie par :

(1) $\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$.

Rappel:

Soit h une fonction numérique définie sur [0,1]. S'il existe un réel positif k tel que :

$$\forall (x, x') \in [0,1]^2 \quad |h(x) - h(x')| \leq k|x - x'|$$

on dit que h est k-Lipschitzienne sur [0,1].

## I - Etude des fonctions $f_n$ associées à f : $x \mapsto x^2$

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

1. Déterminer la fonction polynôme $f_n$ associée à f par (1) dans les deux cas particuliers suivants:

   a) $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = 1$ ,
   b) $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = x$ .

2. f désignant une fonction numérique continue sur [0,1], on note g la fonction définie sur [0,1] par $g(x) = x f(x)$, $f_n$ et $g_n$ les fonctions respectivement associées à f et g par (1) et $f'_n$ la dérivée de $f_n$.

   Vérifier que: (2) $\forall x \in [0,1] \quad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g_n(x) - x f_n(x)$

3. On suppose que $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = x^2$.

   a) déterminer $f_n$ .

   b) calculer $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

4. Déduire des résultats précédents que :

   (3) $\forall x \in [0,1] \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

## II - Etude des fonctions $f_n$ associées à f : $x \mapsto \exp x$ .

Dans toute cette partie, $f_n$ désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à :

f : $[0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp x$ par la relation (1).

1. Vérifier que: $\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = \left[x\left(\exp \frac{1}{n} - 1\right) + 1\right]^n$.

2. Déterminer, pour tout x de [0,1], $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

3. On suppose que $x \in ]0,1[$.

   a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2, en zéro, de : $u \longmapsto \ln[x(\exp u - 1) + 1]$.

   b) En déduire un équivalent, quand n tend vers $+\infty$ de : $f_n(x) - \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

4. Etudier les variations de la fonction $\psi$ définie sur [0,1] par : $\psi(x) = n \ln\left[x\left(\exp \frac{1}{n} - 1\right) + 1\right] - x$

   (On montrera, à l'aide du théorème de Rolle que $\psi'$ possède au moins une racine sur ]0,1[ et, en calculant $\psi'$, que cette racine $x_n$ est unique).

5. En déduire que : $\forall x \in [0,1] \quad \exp x \leq f_n(x) \leq \exp\left[x + \psi(x_n)\right]$ .

   et que : $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - \exp x| \leq e\left[\exp(\psi(x_n)) - 1\right]$.

6. Donner, en utilisant un développement limité de $\psi(x_n)$ à un ordre suffisant, un équivalent de $\exp(\psi(x_n)) - 1$ quand $n \to +\infty$.

## III - Etude des fonctions $f_n$ associées à f : $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

Dans toute cette partie, $f_n$ désigne la fonction polynôme associée, pour $n \geq 1$, à :

f : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ par la relation (1).

1. Détermination de $f_n$ :

   Vérifier que : $\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = n \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n+k} x^k (1-x)^{n-k} = n \int_0^1 u^{n-1} [1 - x(1-u)]^n \, du$ .

TSVP

2. Majoration de $|f'_n(x)|$ :

a) Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que: $\forall\ (t, t') \in [0, 1]^2 \quad |t^n - t'^n| \leq n|t - t'|$

b) En déduire que: $\forall\ (x, x') \in [0, 1]^2$ et $\forall\ u \in [0, 1] \quad |[1 - x(1-u)]^n - [1 - x'(1-u)]^n| \leq n(1-u)|x - x'|$,

puis que $f_n$ est 1-Lipschitzienne sur [0,1].

c) En déduire un majorant de $\sup_{x \in [0, 1]} |f'_n(x)|$.

3. Majoration de $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

a) Utiliser la relation (2) et l'égalité évidente $x\,f(x) = 1 - f(x)$ pour démontrer que:

$$\forall x \in [0, 1] \quad \frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = 1 - (1-x) f_n(x).$$

b) En déduire que: $$\sup_{x \in [0, 1]} \left| f_n(x) - \frac{1}{1+x} \right| \leq \frac{1}{4n}.$$

## IV - Convergence de la suite $(f_n)$ vers f sur [0,1] :

Dans toute cette partie, on désigne par f une fonction numérique continue sur [0,1] et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $f_n$ la fonction polynôme associée à f par (1).

1. Convergence de $\left( \int_0^1 f_n(x)dx \right)_{n \geq 1}$ :

a) On note, pour $0 \leq k \leq n$ : $$I_n(k) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx.$$

Déterminer, pour $0 \leq k \leq n-1$, une relation de récurrence entre $I_n(k)$ et $I_n(k+1)$.

En déduire $I_n(k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

b) Calculer, en fonction de f, $\int_0^1 f_n(x)dx$.

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

2. Etude de $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|$ pour f de classe $C^1$ sur [0,1] :

On suppose f de classe $C^1$ sur [0,1].

a) Montrer qu'il existe un réel positif k tel que f soit k-Lipschitzienne sur [0,1]. En déduire que,
si $M_0(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, on a :

$$\forall \alpha > 0 \text{ et } \forall\ (x, x') \in [0, 1]^2 \quad |f(x') - f(x)| \leq k\alpha + 2\frac{M_0(f)}{\alpha^2}(x' - x)^2.$$

(on distinguera les 2 cas $|x' - x| \leq \alpha$ et $|x' - x| > \alpha$).

b) En utilisant la relation (3), montrer que :

$$\forall \alpha > 0 \text{ et } \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}.$$

d) En déduire l'existence d'un nombre réel positif A tel que :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{A}{\sqrt[3]{n}}.$$

(on pourra étudier, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction : $\alpha \longmapsto k\alpha + \frac{M_0(f)}{2n\alpha^2}$)

Retrouver ainsi $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

3. Vitesse de convergence de $(f_n)_{n \geq 1}$ vers f si f est de classe $C^2$ sur [0,1] :

Soit f une fonction numérique de classe $C^2$ sur [0,1].

a) Démontrer que,
si $M_2(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$, on a :

$$\forall\ (x, x') \in [0, 1]^2 \quad |f(x') - f(x) - (x' - x)f'(x)| \leq \frac{M_2(f)}{2}(x' - x)^2.$$

b) En déduire que:

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{M_2(f)}{8n}.$$

et montrer, par un exemple, que cette majoration est la meilleure possible.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail